ZAD 1 a) Rozbijamy na 2 zagadnienia $u = u_1 + u_2$

I $\begin{cases} \partial_t u_1 = \partial^2_{xx} u_1 \\ \partial_x u_1(t,0) = \partial_x u_1(t,\pi) = 0 \\ u_1(0,x) = x\sin^2 x \end{cases}$ II $\begin{cases} \partial_t u_2 = \partial^2_{xx} u_2 + e^{-t}\cos x \\ \partial_x u_2(t,0) = \partial_x u_2(t,0) = 0 \\ u_2(0,x) = 0 \end{cases}$

I. Metoda rozdzielonych zmiennych. Szukamy rozwiązań postaci $T(t)X(x)$, gdzie

$$\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = -m^2 \quad , \quad m \in \mathbb{R}$$

$\begin{cases} X'' + m^2 X = 0 \\ X'(0) = X'(\pi) = 0 \end{cases}$ $\quad X(x) = C_1\cos(mx) + C_2\sin(mx)$

$X'(x) = -mC_1\sin(mx) + C_2 m\cos(mx)$

$X'(0) = 0 \implies C_2 = 0 \quad , \quad m \neq 0$

$X'(\pi) = 0 \implies m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Rozwiązanie postaci $X(x) = \cos(mx) \quad , \quad m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$T(t) = e^{-m^2 t}$

Stąd $u_1(t,x) = \sum_{m=0}^{+\infty} c_m e^{-m^2 t}\cos(mx)$.

$$x\sin^2 x = \sum_{m=0}^{+\infty} c_m \cos(mx)$$

Dla $m > 0$, $m \neq 2$

$$c_m = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\sin^2 x\cos(mx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\,\frac{1+\cos 2x}{2}\cos(mx)\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\cos(mx)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\cos 2x\cos(mx)\,dx =$$

$\left.\begin{matrix} \alpha - \beta = 2 \\ \alpha + \beta = m \end{matrix}\right\} \implies \alpha = \frac{m+2}{2}, \ \beta = \frac{m-2}{2}$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\cos(mx)\,dx + \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi x\cos\left(\frac{m+2}{2}x\right)dx + \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi x\cos\left(\frac{m-2}{2}x\right)dx$$

$u = x \quad v' = \cos(mx)$
$u' = 1 \quad v = \frac{1}{m}\sin(mx)$

$u = x \quad v' = \cos\left(\frac{m+2}{2}x\right)$
$u' = 1 \quad v = \frac{2}{m+2}\sin\left(\frac{m+2}{2}x\right)$

$u = x \quad v' = \cos\left(\frac{m-2}{2}x\right)$
$u' = 1 \quad v = \frac{2}{m-2}\sin\left(\frac{m-2}{2}x\right)$

$$c_m = \frac{1}{\pi m^2}\left[-1 + (-1)^m\right] - \frac{4m}{m^2-4}\sin\left(\frac{m\pi}{2}\right) - \frac{16(m^2+4)}{(m^2-4)^2\pi}\cos^2\left(\frac{m\pi}{2}\right) \quad (1)$$

$m=0$ $\quad c_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\sin^2 x\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\,\frac{1+\cos 2x}{2}\,dx = \frac{\pi}{4}$ (2)

$m=2$ $\quad c_2 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi x\sin^2 x\cos 2x\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi x\,dx = \frac{1}{4}\pi$ (3)

II. Formuła Duhamela $\quad u(t,x;s)$ - rozwiązanie

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x;s) = \partial^2_{xx} u(t,x;s) \\ u(s,x;s) = e^{-s}\cos x \end{cases} \quad \partial_x u(t,0;s) = \partial_x u(t,\pi;s) \equiv 0$$

$\Rightarrow \quad u(t,x;s) = \sum_{m=0}^{+\infty} d_m e^{-m^2(t-s)}\cos(mx)$ (patrz poprz. punkt)

$\Rightarrow \quad d_0 = 0, \quad d_m = 0, \quad m \geq 2, \quad d_1 = e^{-s}$

$u_2(t,x) = \int_0^t u(t,x;s)\,ds = t e^{-t}\cos x$

Rozwiązanie: $\quad u(t,x) = u_1(t,x) + u_2(t,x) = \sum_{m=0}^{+\infty} c_m e^{-m^2 t}\cos(mx) +$
$+ [1-e^{-t}]\cos x$, gdzie c_m są dane wzorami: (1), (2), (3).

b) $\quad \lim_{t\to+\infty} u(t,x) = \frac{\pi}{4}$.

Zad3 a) Zauważ, że $\sin y = -\sin(iz)$, $z = x+iy$, $x=0$.
Stąd $\quad u(z) = \mathrm{Re}\left[-\sin(iz)\right] = -\mathrm{Re}\,\frac{e^{-z}-e^{z}}{2i} =$
$= \mathrm{Re}\,\frac{i}{2}\left[e^{-z}-e^{z}\right] = \mathrm{Im}\,\frac{e^{z}-e^{-z}}{2} = (\operatorname{sh} x)\sin y$
jest rozwiązaniem.

b) Nie jest jedyne bo $v(z) = u(z) + x$
także jest funkcją harmoniczną spełniającą $v(0,y) = \sin y$.

Zad4 Niech $f(x,y) = \frac{(\pi-x)^2 y^2}{\pi^2}$. Spełnia ona w-ek brzegowy $\Delta f(x,y) = \frac{4}{\pi^2}$. Połóżmy $v = u - f$.
Spełnia ona r-nie Poissona

$$\begin{cases} \Delta v = xy - \frac{4}{\pi^2}, & (x,y) \in \square \\ v_{|\partial\square} = 0 \end{cases}$$

metoda rozdzielania zmiennych

$$v(x,y) = -\sum_{k,l=1}^{+\infty} \frac{c_{k,l}}{k^2+l^2} \sin(kx)\sin(ly)$$

$$(1) \quad c_{k,l} = \frac{4}{\pi^2} \int_0^\pi \int_0^\pi \left(xy - \frac{4}{\pi^2}\right) \sin(kx)\sin(ly)\,dx\,dy =$$

$$= \frac{4}{\pi^2} \left\{ \left(\int_0^\pi \underbrace{x \sin kx\,dx}_{\substack{u = x \quad v' = \sin kx \\ u' = 1 \quad v = -\frac{1}{k}\cos kx}} \right) \left(\int_0^\pi y \sin ly\,dy \right) - \frac{4}{\pi^2} \frac{1}{kl} \cos kx \Big|_0^\pi \cos ly \Big|_0^\pi \right\}$$

$$= \frac{4}{\pi^2} \left\{ \frac{\pi^2}{kl} (-1)^{k+l} - \frac{4}{\pi^2} \frac{1}{kl} (1-(-1)^k)(1-(-1)^l) \right\}$$

Stąd $u(x,y) = \frac{(\pi-x)^2 y^2}{\pi^2} + \sum_{k,l=1}^{+\infty} \frac{c_{k,l}}{k^2+l^2} \sin(kx)\sin(ly)$,

gdzie k, l są dane wzorem (1).

Zad 1 a) Rozbijamy na 2 zagadnienie $u = u_1 + u_2$

$$\text{I}\begin{cases} \partial_t u_1 = \partial^2_{xx} u_1 \\ \partial_x u_1(t,0) = \partial_x u(t,1) = 0 \\ u_1(0,x) = x\sin^2(\pi x) \end{cases} \qquad \text{II}\begin{cases} \partial_t u_2 = \partial^2_{xx} u_2 + e^{-2t}\cos(\pi x) \\ \partial_x u_2(t,0) = \partial_x u_2(t,1) = 0 \\ u_2(0,x) = 0 \end{cases}$$

I. Metoda rozdzielenia zmiennych. Szukamy rozwiązań postaci $X(x)T(t)$, gdzie $\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = -m^2$, $m \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} X'' + m^2 X = 0 \\ X'(0) = X'(1) = 0 \end{cases}$$

$X(x) = C_1\cos(mx) + C_2\sin(mx)$

$X'(x) = -C_1 m\sin(mx) + C_2 m\cos(mx)$

$X'(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0,\ m \neq 0$

$X'(1) = 0 \Rightarrow m = k\pi,\ k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$

Rozwiązanie postaci $\begin{cases} X(x) = \cos(k\pi x) \\ T(t) = e^{-k^2\pi^2 t} \end{cases}$, $k \in \mathbb{N}\cup\{0\}$

Stąd $u_1(t,x) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k e^{-k^2\pi^2 t}\cos(k\pi x)$

$$x\sin^2(\pi x) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k \cos(k\pi x)$$

Dla $k > 0$, $k \neq 2$

$$c_k = 2\int_0^1 x\sin^2\pi x\cos(k\pi x)\,dx = 2\int_0^\pi x\,\frac{1+\cos 2\pi x}{2}\cos(k\pi x)\,dx =$$

$$= \int_0^1 x\cos(k\pi x)\,dx + \int_0^1 x\cos(2\pi x)\cos(k\pi x)\,dx$$

$$\left.\begin{matrix}\alpha - \beta = 2\pi \\ \alpha + \beta = k\pi\end{matrix}\right\} \Rightarrow \alpha = \frac{(k+2)\pi}{2},\quad \beta = \frac{(k-2)\pi}{2}$$

$$= \int_0^1 x\cos(k\pi x)\,dx + \frac{1}{2}\int_0^1 x\cos\left[\frac{(k+2)\pi x}{2}\right]dx + \frac{1}{2}\int_0^1 x\cos\left[\frac{(k-2)\pi x}{2}\right]dx$$

$u = x$, $v' = \cos(k\pi x)$; $u' = 1$, $v = \frac{1}{k\pi}\sin(k\pi x)$ | $u = x$, $v' = \cos\left[\frac{(k+2)\pi x}{2}\right]$; $u' = 1$, $v = \frac{2}{(k+2)\pi}\sin\left[\frac{(k+2)\pi x}{2}\right]$ | $u = x$, $v' = \cos\left[\frac{(k-2)\pi x}{2}\right]$; $u' = 1$, $v = \frac{2}{(k-2)\pi}\sin\left[\frac{(k-2)\pi x}{2}\right]$

$$c_k = \frac{1}{(k\pi)^2}\left[(-1)^k - 1\right] + \frac{4k}{k^2-4}\sin\left(\frac{k\pi}{4}\right) - \frac{16(k^2+4)}{(k^2-4)^2}\cos^2\left(\frac{k\pi}{4}\right) \qquad (1)$$

$k=0 \qquad c_0 = \int_0^1 x \sin^2(\pi x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x\left[1+\cos(2\pi x)\right]dx = \frac{1}{4} \quad (2)$

$k=2 \qquad c_2 = \int_0^1 x \sin^2(\pi x)\cos(2\pi x)\,dx = \frac{1}{2}\int_0^1 x\,dx = \frac{1}{4} \quad (3)$

II. Formuła Duhamela $U(t,x;s)$ rozwiązanie

$$\begin{cases} \partial_t U(t,x;s) = \partial^2_{xx} U(t,x;s) \\ U(s,x;s) = e^{-2s}\cos(\pi x) \\ \partial_x U(t,0;s) = \partial_x U(t,1;s) = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad U(t,x;s) = \sum_{m=0}^{+\infty} d_m e^{-\pi m^2 (t-s)} \cos(m\pi x)$ (patrz poprz. punkt)

$\Rightarrow \quad d_0 = 0, \quad d_m = 0, \quad m \geq 2, \quad d_1 = e^{-2s}$

$$u_2(t,x) = \int_0^t U(t,x;s)\,ds = e^{-t\pi^2}\int_0^t e^{-2s+\pi^2 s}\,ds\,\cos(\pi x) = e^{-t\pi^2}\left(e^{(\pi^2-2)t} - 1\right)\frac{\cos(\pi x)}{\pi^2-2}$$

ROZWIĄZANIE: $u(t,x) = u_1(t,x) + u_2(t,x) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k e^{-k^2\pi^2 t}\cos(k\pi x) +$
$+ \left[e^{-2t} - e^{-\pi^2 t}\right]\frac{\cos(\pi x)}{\pi^2-2}$, gdzie c_k są dane wzorami (1), (2), (3)

b) $\lim_{t\to+\infty} u(t,x) = \frac{1}{4}$,

Zad 2. Niech $f(x,y) = \frac{x^2(\pi-y)^2}{\pi^2}$ oraz $v(x,y) = u(x,y) - f(x,y)$.
Funkcja v spełnia następujące zagadnienie Dirichleta dla r-nia Poissona

$$\begin{cases} \Delta v = x + y - \frac{4}{\pi^2} \quad w\ \square \\ v_{|\partial D} = 0 \end{cases}$$

Stosujemy metodę rozdzielania zmiennych,

$$v(x,y) = \sum_{k,l=1}^{+\infty} \frac{-c_{kl}}{k^2+l^2}\sin(kx)\sin(ly)$$

gdzie

(4) $\quad c_{kl} = \frac{4}{\pi^2}\int_0^\pi\int_0^\pi \left(x+y-\frac{4}{\pi^2}\right)\sin(kx)\sin(ly)\,dx\,dy$

$u=x \quad v'=\sin kx$
$u'=1 \quad v=-\frac{1}{k}\cos(kx)$

$= \frac{4}{\pi^2}\left\{\int_0^\pi x\sin(kx)\,dx \int_0^\pi \sin(ly)\,dy + \int_0^\pi \sin(kx)\,dx\int_0^\pi y\sin(ly)\,dy -\right.$
$\left. - \frac{4}{\pi^2}\int_0^\pi \sin kx\,dx \int_0^\pi \sin ly\,dy\right\} = \frac{4(-1)^{k+1}}{\pi k}\left[(-1)^l-1\right] + \frac{4(-1)^{l+1}}{\pi l}\left[(-1)^k-1\right]$

$-\frac{4}{\pi^2}\left[1-(-1)^k\right]\left[1-(-1)^l\right]$

Stąd $u(x,y) = \frac{x^2(\pi-y)^2}{\pi^2} + \sum_{k,l=1}^{+\infty} \frac{-c_{k,l}}{k^2+l^2} \sin(kx)\sin(ly)$, gdzie

$c_{k,l}$ są dane przez (4)

Zad 4 a) $\cos y = \cos(iz)$ dla $z = x+iy$, $x = 0$

Czyli rozwiązanie dane jest przez

$u(z) = \mathrm{Re}\cos(iz) = \mathrm{Re}\,\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$ [illegible]

$= \mathrm{ch}\,x \cos y$.

b) Rozwiązanie nie jest jedyne bo np

$v(x,y) = u(x,y) + x$ jest także rozwiązaniem.